H27年度後期

統計学

第１４回　いろいろな検定

独立性の検定（カイ二乗検定）
教科書 6.7節

茅野 光範　(かやの　みつのり)

講義の予定　第9回～期末試験

- 12/14 [茅野] 標本と標本分布1
- 12/21 [茅野] 標本と標本分布2
- 1/18 [茅野] 区間推定
- 1/25 [茅野] 仮説検定の基礎
- 2/1 [茅野] 母平均の検定(t-検定)
- 2/8 [茅野] いろいろな仮説検定とまとめ
- 2/15 [姜、茅野] 期末試験
- 2/22 [茅野] 予備日

推測統計学

教科書
第4、5、6章

90分／1回×15回＝22.5時間

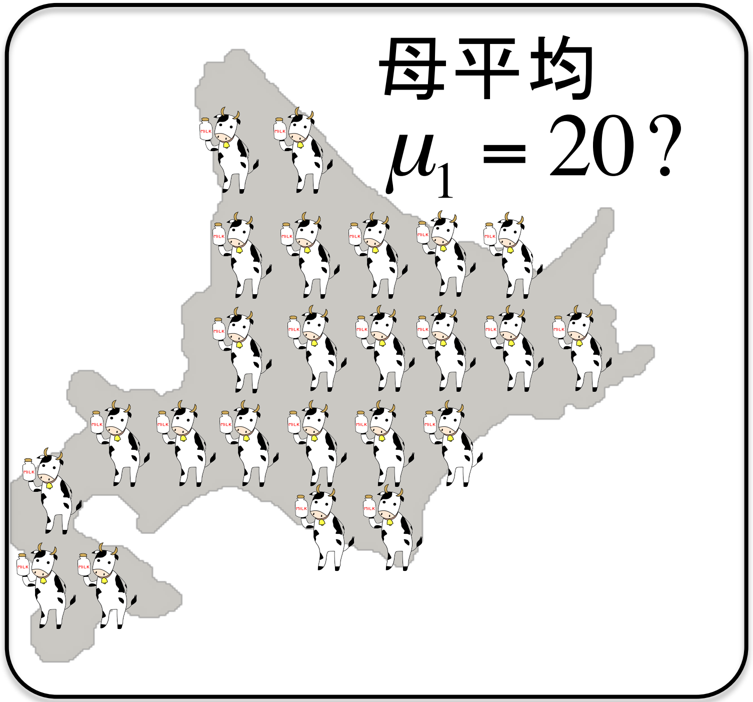
復習

母平均の差の検定
(t検定)

帰無仮説H_0:
差がない

$$\boxed{\mu_1 = \mu_2}$$

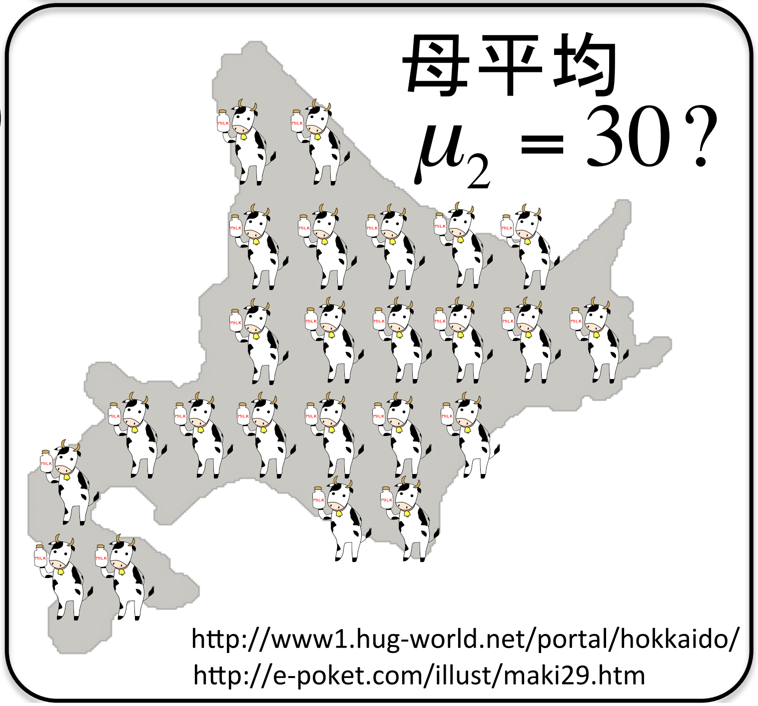
母集団1(昔)



対立仮説H_1:
差がある

$$\boxed{\mu_1 \neq \mu_2}$$

母集団2(今)



⇒ <u>統計的に有意な差</u>があるか？

復習

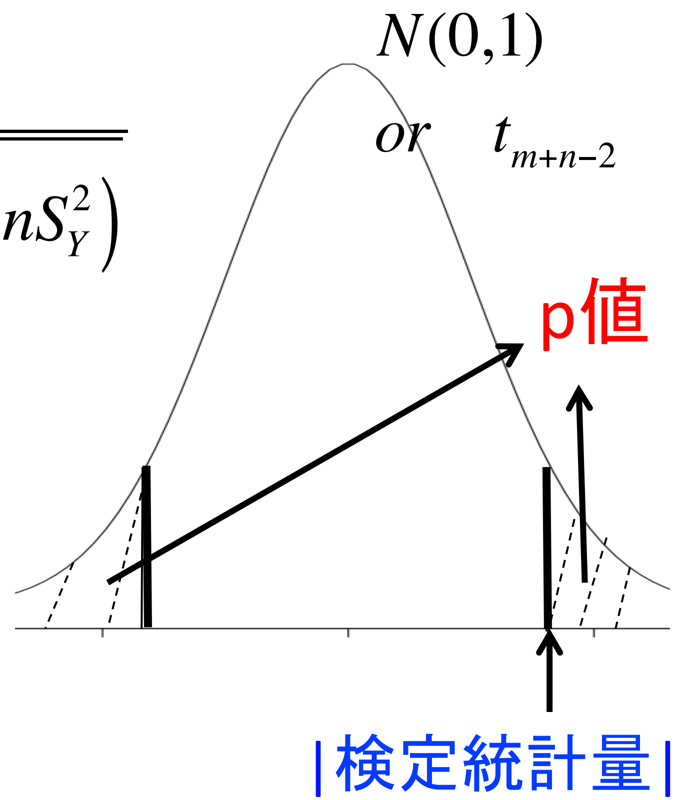
$\mu_1=\mu_2$の検定の手順（p値を求める）

準備：　有意水準αを決める

1. 帰無仮説は　　　　　H_0:　$\mu_1=\mu_2$
2. 対立仮説を決める　H_1:　$\mu_1\neq\mu_2$　　$(\mu_1<\mu_2$ or $\mu_1>\mu_2$?)
3. 検定統計量の値を計算する

$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}} \quad \text{or} \quad \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{m+n}{mn(m+n-2)}\left(mS_X^2+nS_Y^2\right)}}$$

4. H_0のもとでの分布が決まるので、
   p-値を求める
5. p値≦αかどうかを調べる
6. p値≦αならH_0を棄却しH_1を採択
   そうでないならH_0を受容

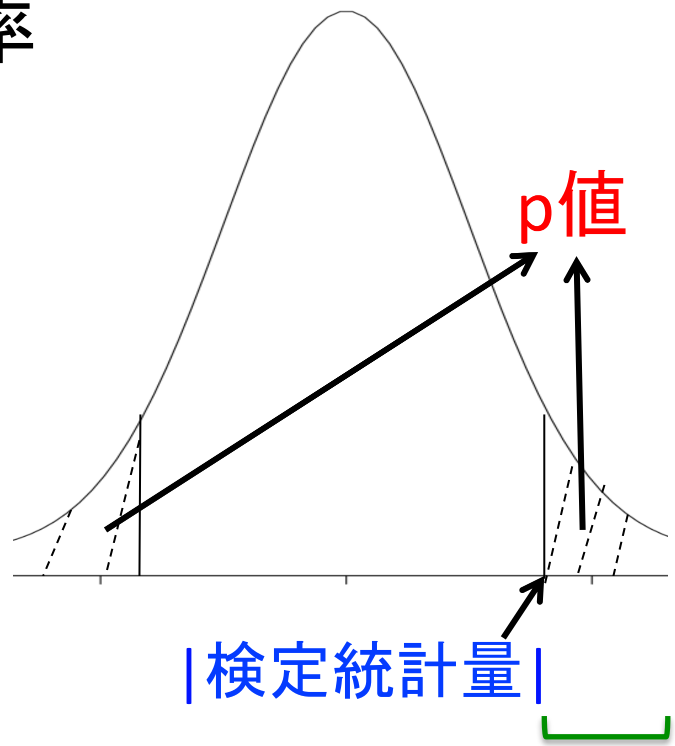


p値

手持ちのデータから計算した値（Zなど）が，
帰無仮説のもとで出る確率

- p値が小さい（<0.05）
  ⇒ **帰無仮説**は，正しくないようだ
  ⇒ **帰無仮説**を<u>棄却する</u>

- 小ささの判断
  p値<0.05 or 0.01 なら
  十分小さいとする
  0.05や0.01：<u>有意水準</u>という



- p値の求め方 1: <u>分布の両端を調べる</u>　（両側検定）
  2: 分布の片側だけを調べる（片側検定）

復習

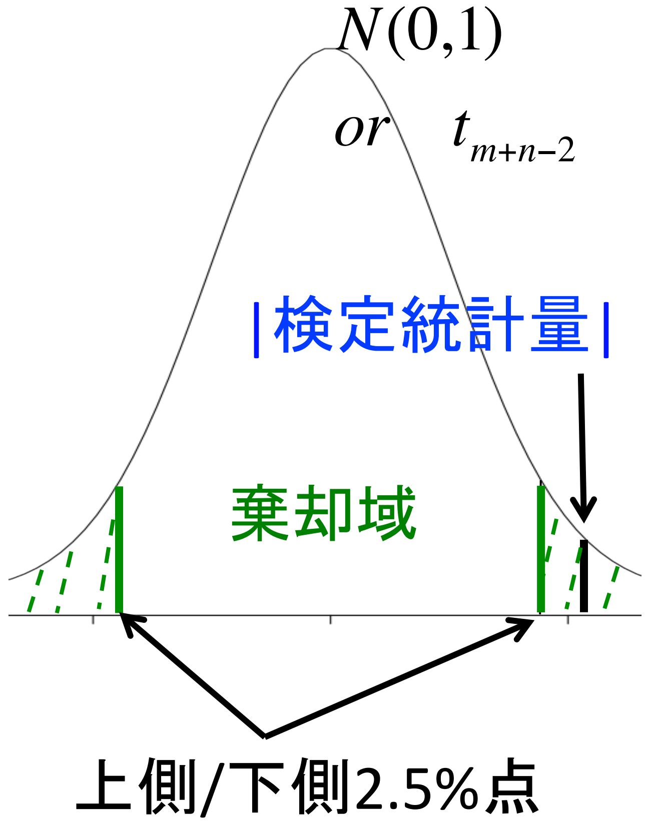
$\mu_1=\mu_2$の検定の手順（p値を求めない）

準備:　有意水準αを決める

1. 帰無仮説は　　　　H_0: $\mu_1=\mu_2$
2. 対立仮説を決める H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$　($\mu_1<\mu_2$ or $\mu_1>\mu_2$?)
3. 検定統計量の値を計算する

$$\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}}} \quad \text{or} \quad \frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{m+n}{mn(m+n-2)}\left(mS_X^2+nS_Y^2\right)}}$$

4. H_0のもとでの分布が決まるので、上側α/2×100%点を求める
5. |検定統計量の値| ≧（上側α/2×100%点）かを調べる
6. 5が成り立つならH_0を棄却しH_1を採択、そうでないならH_0を受容



α=0.05のとき

復習

先週のレポート課題（練習問題6.2改）

２つの工場A, Bで同一の製品をそれぞれ10個作って重さを量った．

A工場： 7, 8, 8, 8, 8, 9, 10, 10, 10, 12

B工場： 9, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 13, 13

A, B両工場で作られた製品の重さに差があると言えるか，有意水準5%で検定せよ．ただし，それぞれの工場において，製品の重さは正規分布に従い，分散は等しいとする．また，自由度18のt分布に従う確率変数Tについて，

$P(T \le -3.17) = 0.0027$ となることと，$\sqrt{0.4} \cong 0.63$ を使ってよい．検定統計量の値は小数第二位まで求めればよい．

提出日： 次回の講義開始時

講義資料： http://board.obihiro.ac.jp/~kayano/lecture.html

復習

用語まとめ

- 帰無仮説　：　母平均が等しいなどの仮説
- 対立仮説　：　帰無仮説の逆
- 検定統計量　：　検定に使う統計量
- p値　：　確率の値
- 有意水準　：　p値の閾値（通常は0.05）
- 帰無仮説を棄却する：　帰無仮説は正しくないと判断
- 対立仮説を採択する：　対立仮説が正しいと判断
- 帰無仮説を受容する：　帰無仮説が正しくないとは言えない　と判断

その他：　両側検定と片側検定　教科書p104
第１種の誤り，第２種の誤り　教科書p105

復習

帰無仮説と対立仮説が決まったら

- 検定統計量を決める（決まっている）

$$\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \text{or} \quad \frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n-1}} \quad \text{or....}$$

- 検定統計量の分布を求める（求まっている）

ただし、帰無仮説のもとでの分布

正規分布　or　t-分布　or ...

- あとは、p値を求めたりすればいい

注：何の検定をするかによって、
仮説や検定統計量、分布は異なるが、手順は全く同じ
あと、確認すべきことは、前提条件（データが正規分布に従う、など）

今日やること

- 独立性の検定（カイ二乗検定）
- エクセルでカイ二乗検定
- 補足：　p-値の性質,　　　　　いろいろな検定

薬の効果はあるのか？

	治った	治らなかった	計
薬飲んだ	45	15	60
薬飲まなかった	20	20	40
計	65	35	100

(人）

言い換えると，行と列は独立か？

方針：　カイ二乗検定に向けて

1. 簡単な場合

   各行の合計，列の合計が全て等しい場合

	治った	治らなかった	計
薬飲んだ	?	?	50
薬飲まなかった	?	?	50
計	50	50	100

2. 一般の場合

例：　薬の効果がない

各人数が全て同じ＝行にも列にも関係ない
（各行の合計，各行の合計が等しいとする）

	治った	治らなかった	計
薬飲んだ	25	25	50
薬飲まなかった	25	25	50
計	50	50	100

(人）

各人数を，期待度数と呼ぶことにする

例:　薬の効果がある

薬飲んで治った人,
薬飲まなくて治らなかった人が多い

	治った	治らなかった	計
薬飲んだ	45	5	50
薬飲まなかった	5	45	50
計	50	50	100

(人)

各人数が，行と列に関係している

調べる仮説

- 帰無仮説H_0:　薬の効果なし
  行と列は独立
- 対立仮説H_1:　薬の効果あり
  行と列は独立でない

⇒　どうやって検定するのか？

検定の方針

期待度数	治った	治らなかった	計
薬飲んだ	25	25	50
薬飲まなかった	25	25	50
計	50	50	100

比べる ⇕ 差があるか?

データ	治った	治らなかった	計
薬飲んだ	45	5	50
薬飲まなかった	5	45	50
計	50	50	100

$$\chi^2 = \frac{(45-25)^2}{25} + \frac{(5-25)^2}{25} + \frac{(5-25)^2}{25} + \frac{(45-25)^2}{25}$$

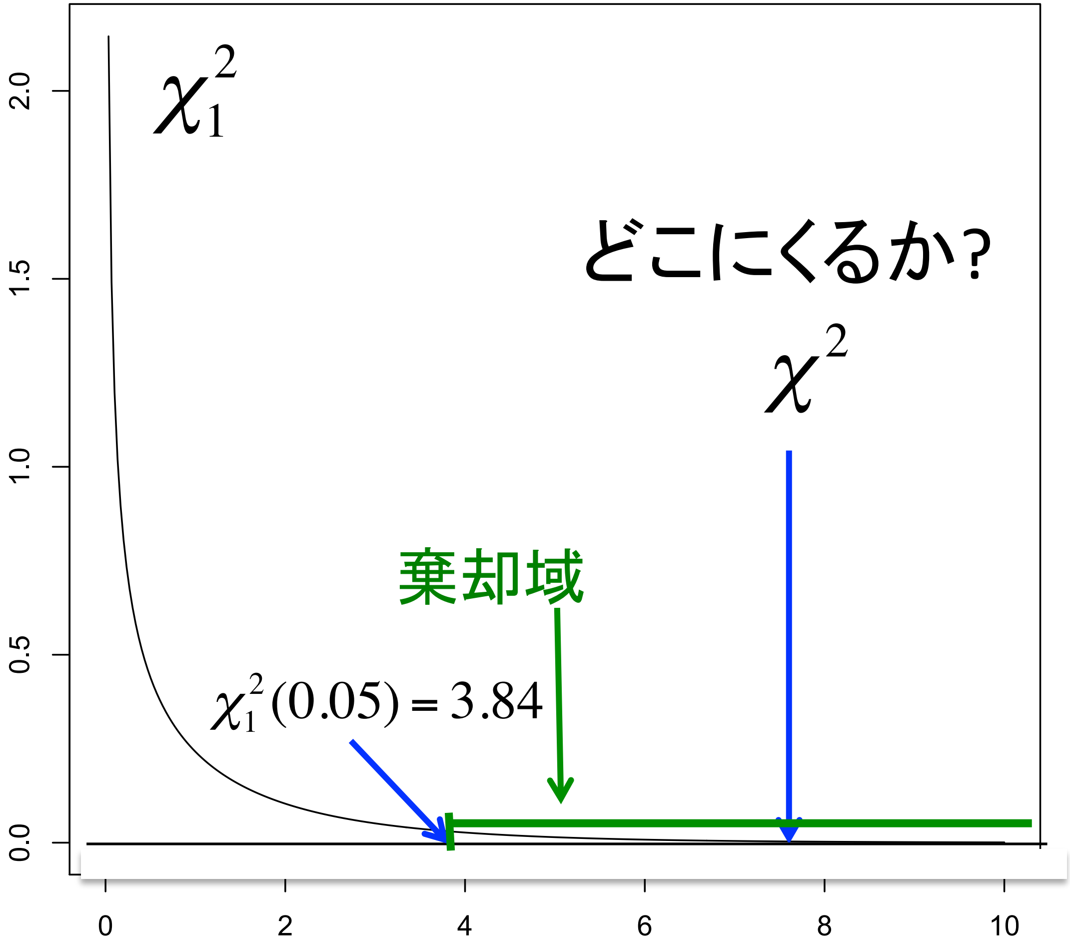
期待度数	治った	治らなかった	計
薬飲んだ	25	25	50
薬飲まなかった	25	25	50
計	50	50	100

データ	治った	治らなかった	計
薬飲んだ	45	5	50
薬飲まなかった	5	45	50
計	50	50	100

$$\chi^2 = \frac{(45-25)^2}{25} + \frac{(5-25)^2}{25} + \frac{(5-25)^2}{25} + \frac{(45-25)^2}{25}$$

$\sim \chi^2_1$ （近似的）

ただし、各度数は
小さすぎないとする　例:5以上



χ^2値が、検定統計量
$\chi^2{}_1$が、検定統計量の分布

χ^2=64
p値=1.24×10^{-15}

χ^2の値は分布の
だいぶ右端にある

2. 一般の場合

薬の効果はあったのか？

	治った	治らなかった	計	
薬飲んだ	45	15	60	
薬飲まなかった	20	20	40	
計	65	35	100	(人）

言い換えると，行と列は独立か？

検定の方針

1. 行と列が独立のとき，
   期待される人数(期待度数)を求める
2. データとの差がどのくらいあるかを調べる

期待人数	治った	治らなかった	計
薬飲んだ	??	??	60
薬飲まなかった	??	??	40
計	65	35	100

検定の方針

期待度数	治った	治らなかった	計
薬飲んだ	??	??	60
薬飲まなかった	??	??	40
計	65	35	100

比べる ⇕ 差があるか?

データ	治った	治らなかった	計
薬飲んだ	45	15	60
薬飲まなかった	20	20	40
計	65	35	100

期待度数の求め方 1 / 4

- 薬を飲んで治った人の期待度数

　薬を飲んだ人 60人 （100人中）

　治った人　　 65人 （100人中）

　⇒ $60 \times 65/100 =$ 39人

期待度数	治った	治らなかった	計
薬飲んだ	??		60
薬飲まなかった	??		40
計	65		100

× 65/100

× 65/100

期待度数の求め方 2 / 4

- 薬を飲んだのに治らなかった人の期待度数

 薬を飲んだ人　60人　(100人中)

 治らなかった人 35人　(100人中)

 ⇒　$60 \times 35/100 = 21$人

期待度数	治った	治らなかった	計
薬飲んだ	39	??	60
薬飲まなかった	??	× 35/100	40
計	65	35	100

× 35/100

期待度数の求め方 3 / 4

- 薬を飲まないで治った人の期待度数

　　薬を飲まなかった人　　40人（100人中）

　　治った人　　　　　　　65人（100人中）

　　⇒　40 × 65/100 = 26人

期待度数	治った	治らなかった	計
薬飲んだ	39	[illegible]	60
薬飲まなかった	??		40
計	65		100

× 65/100

× 65/100

期待度数の求め方 4 / 4

- 薬を飲まないで治らなかった人の期待度数

  薬を飲まなかった人　40人（100人中）

  治らなかった人　35人（100人中）

  ⇒　40 × 35/100 = 16人

期待度数	治った	治らなかった	計
薬飲んだ	39	× 35/100	60
薬飲まなかった	26	??	40
計	65	35	100

× 35/100

検定の方針

期待度数	治った	治らなかった	計
薬飲んだ	39	21	60
薬飲まなかった	26	16	40
計	65	35	100

比べる ⇕ 差があるか?

データ	治った	治らなかった	計
薬飲んだ	45	15	60
薬飲まなかった	20	20	40
計	65	35	100

$$\chi^2 = \frac{(45-39)^2}{39} + \frac{(15-21)^2}{21} + \frac{(20-26)^2}{26} + \frac{(20-16)^2}{16}$$

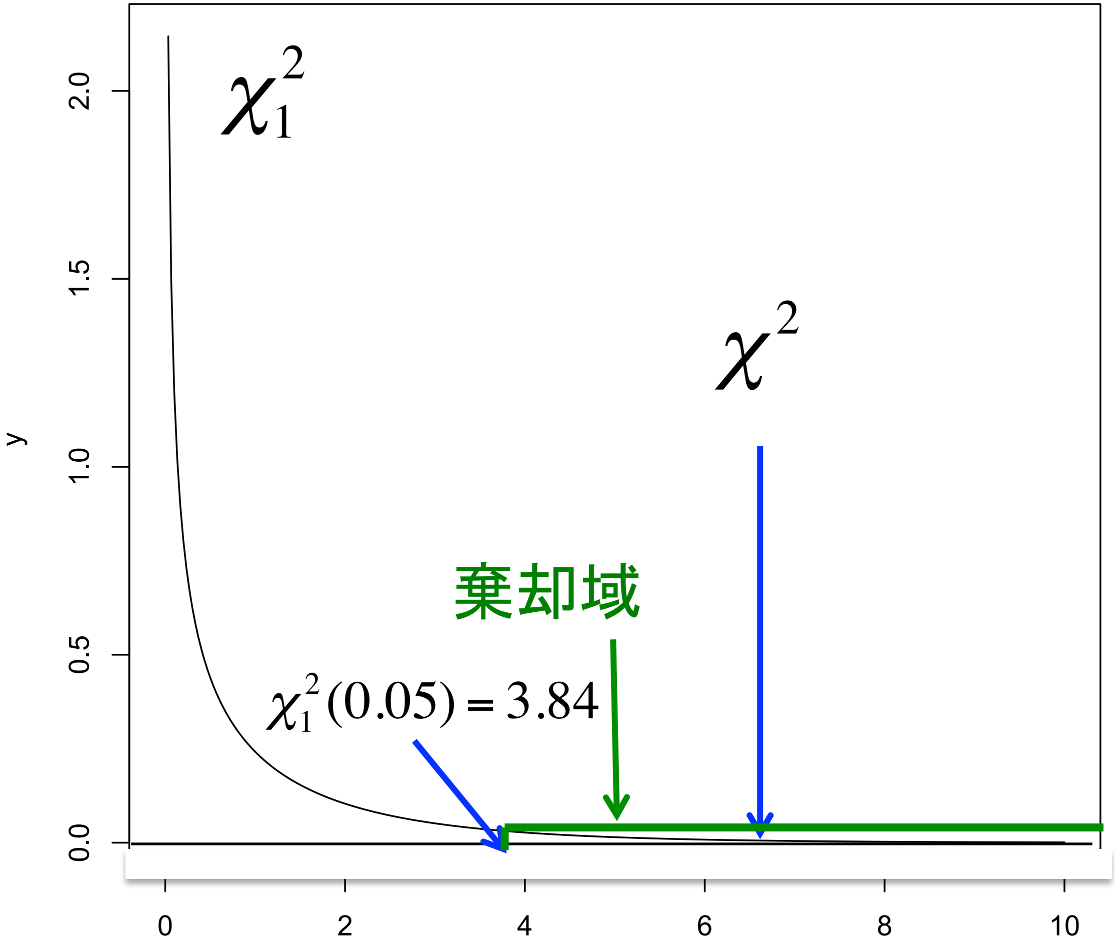
期待度数	治った	治らなかった	計
薬飲んだ	39	21	60
薬飲まなかった	26	16	40
計	65	35	100

データ	治った	治らなかった	計
薬飲んだ	45	15	60
薬飲まなかった	20	20	40
計	65	35	100

$$\chi^2 = \frac{(45-39)^2}{39} + \frac{(15-21)^2}{21} + \frac{(20-26)^2}{26} + \frac{(20-16)^2}{16}$$

$\sim \chi_1^2$ （近似的）

ただし、各度数は
小さすぎないとする　例:5以上



χ^2=6.593
p値=0.010<0.05

式で表すと

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{\left(n_{ij} - \frac{n_{i\cdot}n_{\cdot j}}{n}\right)^2}{\frac{n_{i\cdot}n_{\cdot j}}{n}} \sim \chi_1^2$$

（近似的）

ただし，$n_{ij} \geqq 5$

データ	治った	治らなかった	計
薬飲んだ	n_{11}	n_{12}	$n_{1\cdot}$
薬飲まなかった	n_{21}	n_{22}	$n_{2\cdot}$
計	$n_{\cdot 1}$	$n_{\cdot 2}$	n

まとめ：　独立性の検定

準備：　有意水準αを決める

1. 帰無仮説　　H_0：　行と列は独立（薬の効果なし）
2. 対立仮説　　H_1：　独立でない　（薬の効果あり）
3. 検定統計量の値（χ^2値）を計算する

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{\left(n_{ij} - n_{i\cdot}n_{\cdot j}/n\right)^2}{n_{i\cdot}n_{\cdot j}/n}$$

4. H_0のもとでの分布（χ^2_1）が決まるので、　　　ただし，$n_{ij} \geqq 5$
   p-値と、　χ^2_1の上側100α%点$\chi^2_1(\alpha)$を求める
5. p値≦αかどうかを調べる
   あるいは、$\chi^2_1(\alpha) \leqq \chi^2$値かどうかを調べる
5. p値≦α（⇔ $\chi^2_1(\alpha) \leqq \chi^2$値）なら$H_0$を棄却し$H_1$を採択
   そうでないならH_0は棄却できない

例題

参考：藤澤洋徳「確率と統計」12.2節

ある抗がん剤には副作用がある．また，A市とB市の副作用の程度は差があるようである．これを調べるために，以下のようなデータをとってみた．このとき，A市とB市での副作用に差があるかどうか，有意水準5%で検定せよ．ただし，自由度1のカイ二乗分布について，$P(\chi^2 \geq 22.4) = 2.21\times10^{-6}$ となる．

	副作用あり	副作用なし	計
A市	23	6	29
B市	7	28	35
計	30	34	64

H_0：副作用に差はない
H_1：副作用に差がある

期待度数

$n_{11}^{*}=29\times30/64≒13.6$
$n_{12}^{*}=29\times34/64≒15.4$
$n_{21}^{*}=35\times30/64≒16.4$
$n_{22}^{*}=35\times34/64≒18.6$

	副作用あり	副作用なし	計
A市	n_{11}^{*}	n_{12}^{*}	29
B市	n_{21}^{*}	n_{22}^{*}	35
計	30	34	64

検定統計量

$$\chi^2=\frac{(23-13.6)^2}{13.6}+\frac{(6-15.4)^2}{15.4}+\frac{(7-16.4)^2}{16.4}+\frac{(28-18.6)^2}{18.6}=22.4$$

p値 $P(\chi^2\geq 22.4)=2.21\times10^{-6}<0.05$

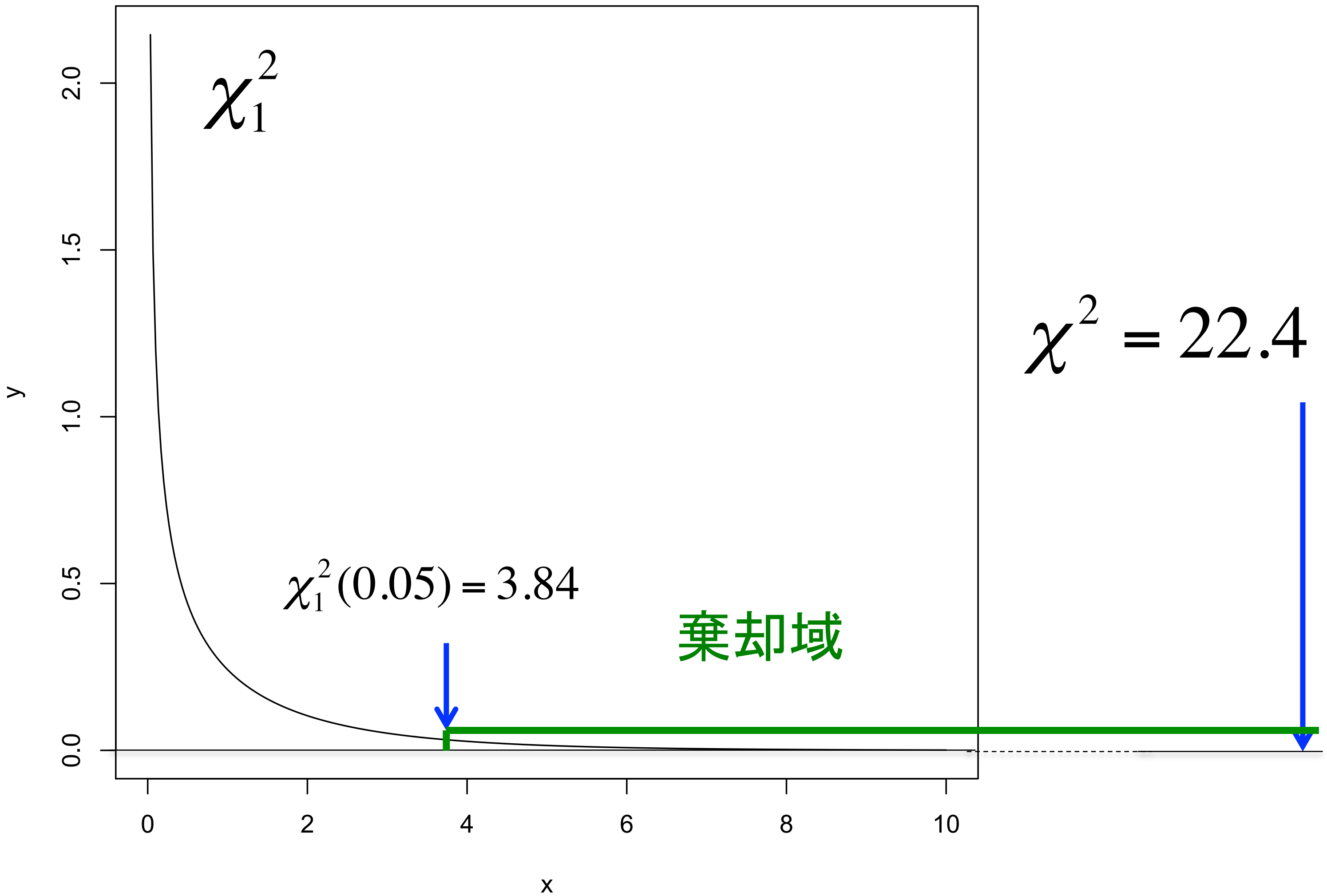
上側5%点 $\chi_1^2(0.05)=3.84<22.4$

帰無仮説 を棄却し，対立仮説を採択する．

よって，

A市とB市の副作用の程度に差がある

H_0 : 副作用に差はない
H_1 : 副作用に差がある



カイ二乗検定の注意

どんなデータに使うのか？

1. ２択のデータしかない場合に、カイ二乗検定を行う
2. 具体的な数字（身長、体重、得点など）があればt検定をすればいい

どんなときに使えるのか？（前提条件）

3. 各セル（マス）に５以上のデータがあるとする
   そうでない場合は、イェーツの補正か、
   フィッシャーの正確確率検定（Fisher’s exact test)を行う

今日やること

- 独立性の検定（カイ二乗検定）
  薬の効果はあったのか？

- エクセルでカイ二乗検定

- 補足:　p-値の性質

- いろいろな検定

エクセルでやってみる

エクセルで

　χ^2検定をしてみる

　χ^2分布の確率を求める

エクセルで χ^2 検定 1

期待度数を計算する: 地道に計算する

データ

	副作用あり	副作用なし	合計
A市	23	6	29
B市	7	28	35
合計	30	34	64

期待人数

	副作用あり	副作用なし	合計
A市	13.59375	15.40625	29
B市	16.40625	18.59375	35
合計	30	34	64

エクセルで χ^2 検定 2

CHISQ.TEST(”実測値範囲”, “期待値範囲”)とする

データ

	副作用あり	副作用なし	合計
A市	23	6	29
B市	7	28	35
合計	30	34	64

期待人数

	副作用あり	副作用なし	合計
A市	13.59375	15.40625	29
B市	16.40625	18.59375	35
合計	30	34	64

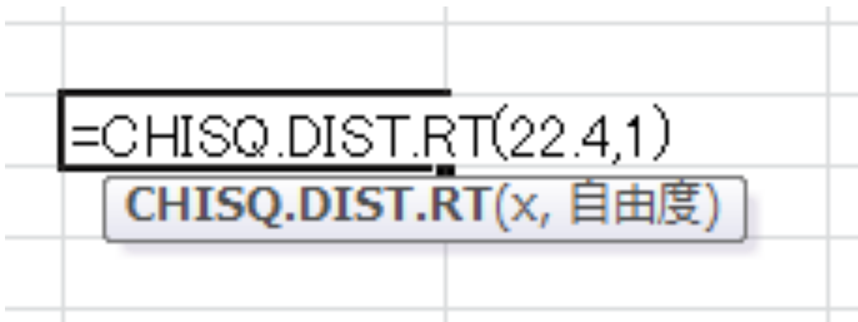
CHISQ.TEST =CHISQ.TEST(C4:D5,C10:D11)

実測値範囲:　データ
期待値範囲:　期待度数

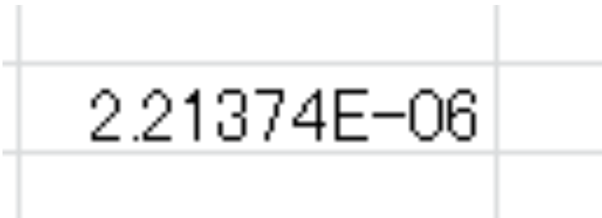
CHISQ.TEST	2.21025E-06

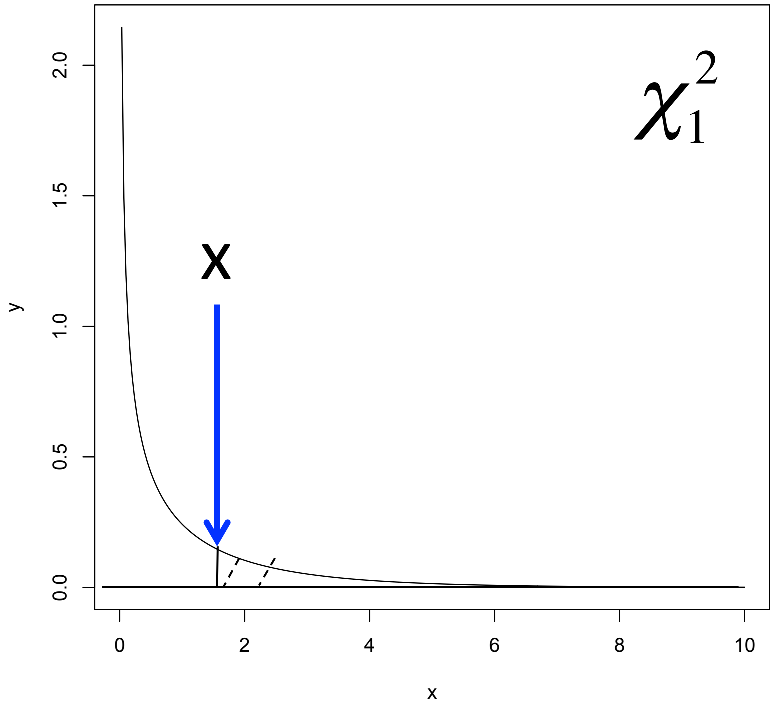
エクセルで　χ^2分布からの確率を求める

CHISQ.DIST.RT(x, “自由度”)で計算できる



x　　　:　横軸の値
自由度:　χ^2分布の自由度





エクセルで χ^2 検定など

χ^2検定

1. 期待度数を計算する
2. CHISQ.TEST（***, ***）を使う

χ^2分布からの確率を求める

CHISQ.DIST.RT(x, 1)で計算できる

補足: p値の性質

- 同じようなデータでも
  データ数が多いとp値は小さくなる

- 逆に,
  データ数が少ないと, なかなかp値が小さくならない

  今日やった χ^2検定でも, 先週のt-検定でも同じ

例：薬の効果を100人or 1000人で調べた

100人の場合：　薬の効果はなかった（p値=0.424>0.05)

	治った	治らなかった	計
薬飲んだ	27	23	50
薬飲まなかった	23	27	50
計	50	50	100

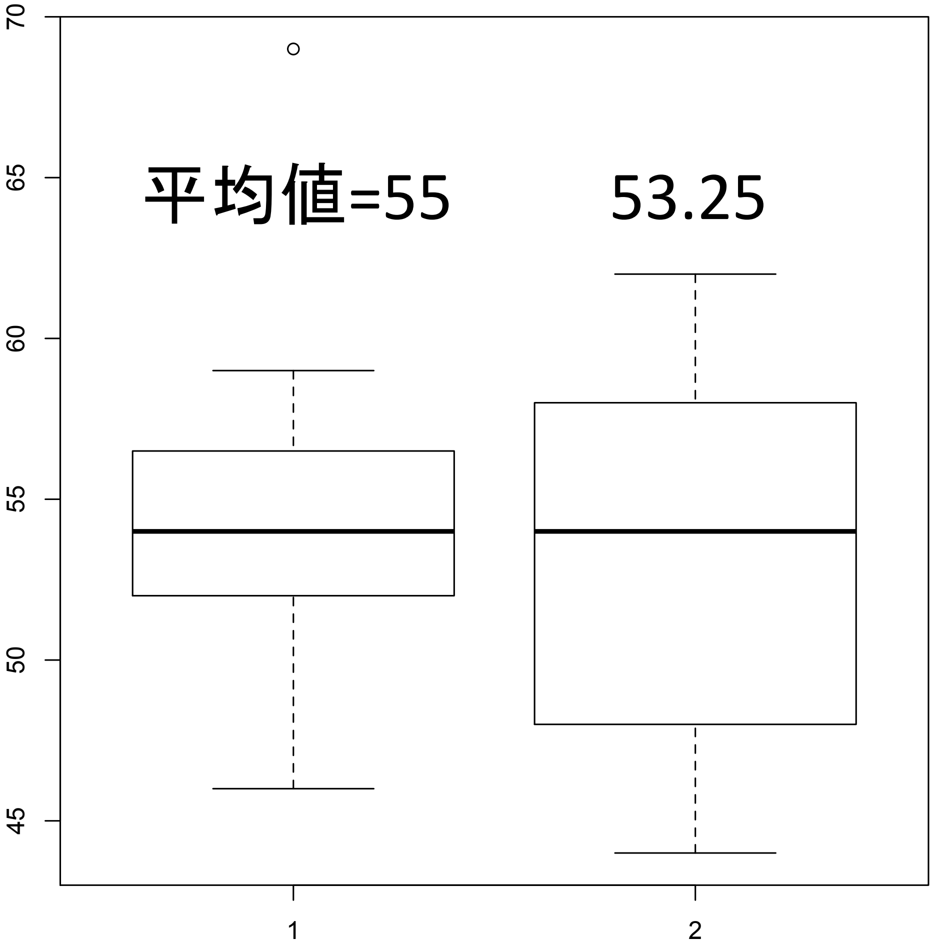
1000人の場合：　薬の効果はあった(p値=0.011<0.05)

	治った	治らなかった	計
薬飲んだ	270	230	500
薬飲まなかった	230	270	500
計	500	500	1000

例：試験成績の比較　8人 or 160人

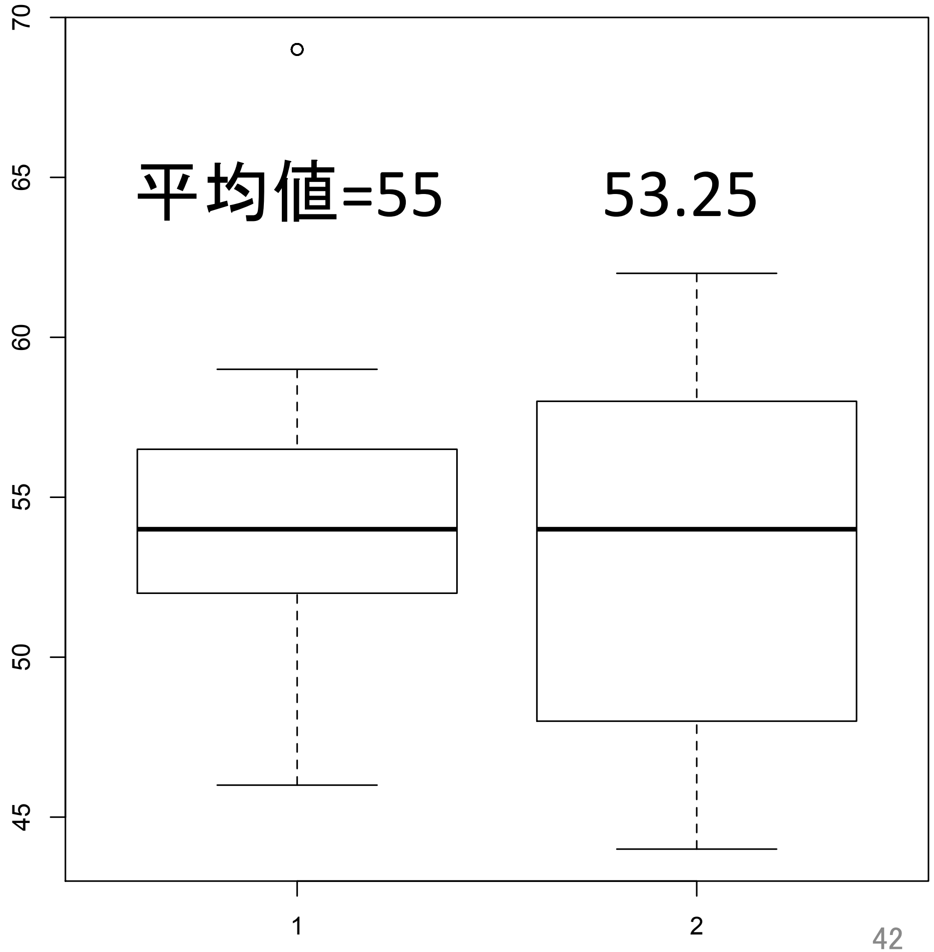
8人のとき

差がない (p値=0.598>0.05)



160人のとき

差がある (p値=0.011<0.05)



いろいろな検定 1

独立性の検定（$n_{ij}<5$の場合）

修正： イェーツの修正 （教科書p.129）

他の検定： フィッシャーの正確確率検定

サイコロが歪んでいないかどうかの検定

（適合度検定 or カイ2乗検定　　教科書6.6節）

相関係数の検定（教科書6.8節）

などなど

いろいろな検定 2

母平均が等しいかどうかの検定

- 母平均2つ

  データは正規分布　　　　　：　t-検定やwelchの方法

  データは正規分布でない：　wilcoxonの順位和検定

- 母平均3つ以上

  データは正規分布　　　　　：　分散分析（ANOVA)

  データは正規分布でない：　Kruskal-Wallis検定

いろいろな検定のためのソフトの例

- **<u>エクセル統計</u>**　2万円?　http://software.ssri.co.jp/ex2010/
  あるいは、エクセルの本についているアドインソフト
  例：「4 Steps エクセル統計」4,000円ぐらい
- SAS　（レンタル制のよう）
- SPSS　10万円ぐらい?
- JMP　5万円ぐらい?
- **<u>R</u>**　無料！
  ただし、プログラミングが必要
  パッケージが非常に充実しているので、
  最新の論文の方法も簡単に適用可能
  （なこともある）

今日やったこと

- 独立性の検定（カイ二乗検定）

  薬の効果はあったのか？

- エクセルでカイ二乗検定

- 補足： p-値の性質

- いろいろな検定の紹介

演習

参考：鈴木・山田「数理統計学」p251

ある病気を防ぐための予防接種の効果を調べた．予防接種に効果があるかを，有意水準5%で検定せよ．ただし，自由度1のカイ二乗分布に従う確率変数χ^2

について，$P(\chi^2 \geq 18.5) = 1.70 \times 10^{-5}$ となることを使ってよい．

	病気	病気にならなかった	計
予防接種受けた	20	380	400
受けなかった	80	520	600
計	100	900	1000

H_0：予防接種に効果なし

H_1：予防接種に効果あり