H27年度後期

統計学

第１２回　仮説検定の基礎

茅野 光範 (かやの　みつのり)

講義の予定　第9回～期末試験

- 12/14 [茅野] 標本と標本分布1
- 12/21 [茅野] 標本と標本分布2
- 1/18 [茅野] 区間推定
- 1/25 [茅野] 仮説検定の基礎
- 2/1 [茅野] 母平均の検定(t-検定)
- 2/8 [茅野] いろいろな仮説検定とまとめ
- 2/15 [姜、茅野] 期末試験(予定)
- 2/22 [茅野] 予備日

推測統計学

教科書
第4、5、6章

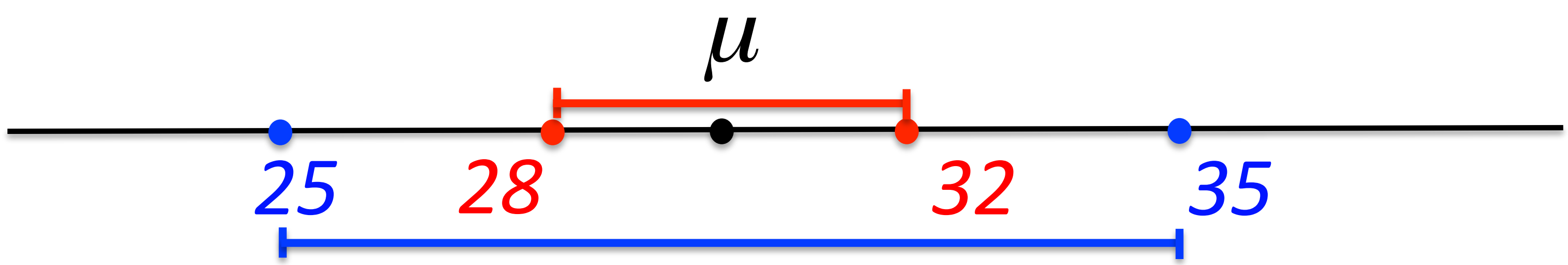
90分／1回×15回＝22.5時間

復習

区間推定（信頼区間）

いままで:　　母平均の値は、◯◯です。
（点推定）

区間推定:　母平均の値が△△から□□の値になる
確率は95%です。

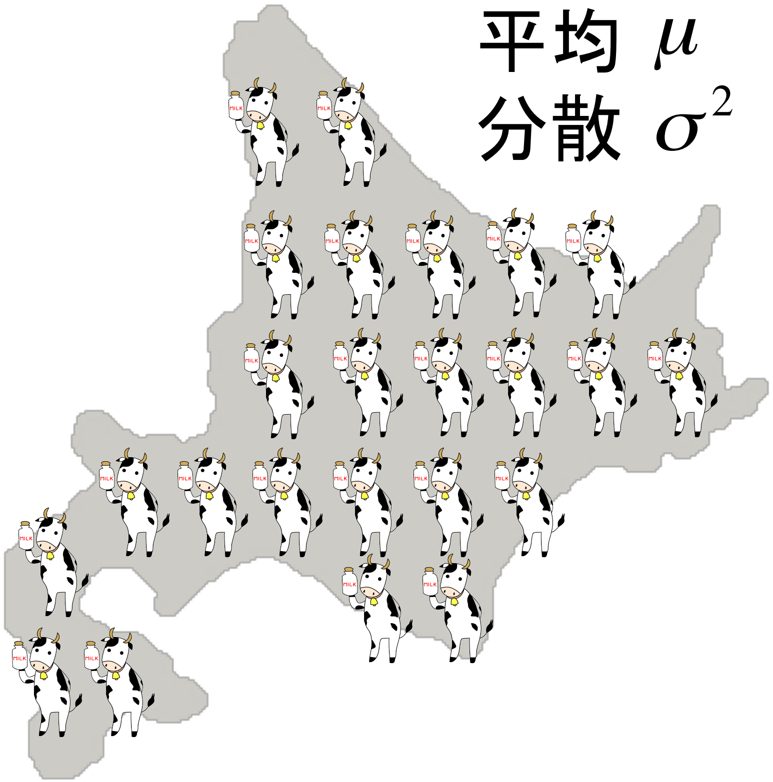


復習

標本を何度もとると…

母集団

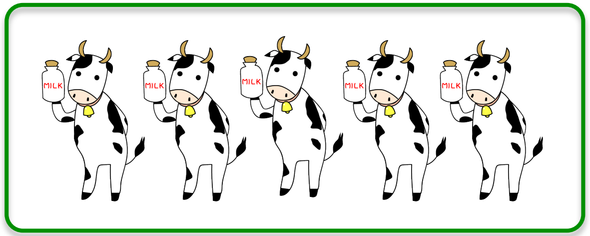
平均値は毎回違う！



平均 μ
分散 σ^2

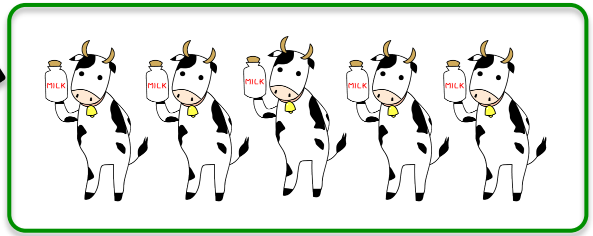
推測

標本



平均 $\bar{X}_1$, 分散 S_1^2

抽出



平均 $\bar{X}_2$, 分散 S_2^2

http://www1.hug-world.net/portal/hokkaido/
http://e-poket.com/illust/maki29.htm

重要！

母平均μの信頼区間

1　σ^2の値がわかっている場合

（大標本の場合に近似的にこれを使うことがある）

95%信頼区間 $$\left[\bar{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\quad \bar{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

99%信頼区間 $$\left[\bar{X} - 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\quad \bar{X} + 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

2　σ^2の値がわからない場合

95%信頼区間 $$\left[\bar{X} - t_{n-1}(0.025)\frac{S}{\sqrt{n-1}},\quad \bar{X} + t_{n-1}(0.025)\frac{S}{\sqrt{n-1}}\right]$$

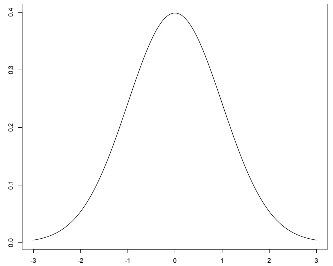
99%信頼区間 $$\left[\bar{X} - t_{n-1}(0.005)\frac{S}{\sqrt{n-1}},\quad \bar{X} + t_{n-1}(0.005)\frac{S}{\sqrt{n-1}}\right]$$

復習

記号の復習1

- $X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$:
  確率変数X_iが期待値μ、分散σ^2の正規分布に従う

  つまり, X_iの密度関数が, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ となる



- μ :　母平均(未知)　　　これから推定する
- σ^2:　母分散(未知)　　　これから推定する
- σ :　母標準偏差(未知)　これから推定する

- $\bar{X}$:　標本平均　　　(計算できる値)
- S^2:　標本分散　　　(計算できる値)
- S :　標本標準偏差 (計算できる値)

復習

記号の復習2

- Σ: シグマ　足し算をまとめる記号

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

i=1から始めて、i=nまで、x_iを足す。

- データ　$X_1, X_2, \cdots, X_n$
- 平均値　$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
- 分散　$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$

復習

信頼区間の求め方

（今日もこの２つを使います）

1. σ^{2}の値がわかっている場合

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$ を使う

$$\bar{X} \sim \mathrm{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

2. σ^{2}の値がわからない場合

$$\frac{(\overline{X}-\mu)}{S/\sqrt{n-1}} \sim t_{n-1}$$ を使う

$X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ （互いに独立）とする

復習

標本分布

$X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ （互いに独立）のとき，*(i=1,...,n)*

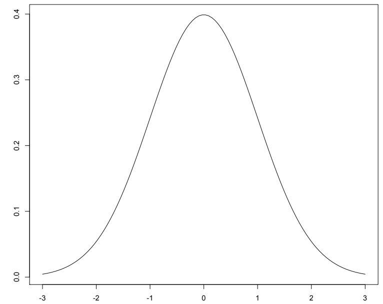
- 平均 $\boxed{\bar{X} \sim \mathrm{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})}$ $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1),$

- 分散 $\boxed{\frac{nS^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2_{n-1}}$

- 平均／標準偏差 $\boxed{\frac{(\bar{X} - \mu)}{S / \sqrt{n-1}} \sim t_{n-1}}$

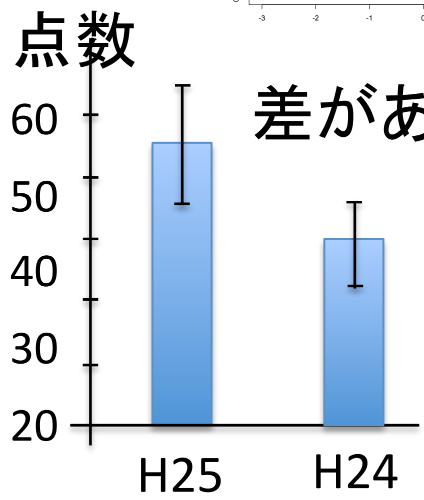
この講義の到達目標

- ✓ ヒストグラムや散布図を描き、基本統計値を使って、データのとりまとめができる　（平均や分散）
- ✓ 基本的な確率を計算し、実用的な確率の問題が解ける
- ✓ 確率分布　特に 正規分布を説明できる



4. 仮説検定　特に t検定を、p-値(probability value)を使って説明できる

後半の一番の目標



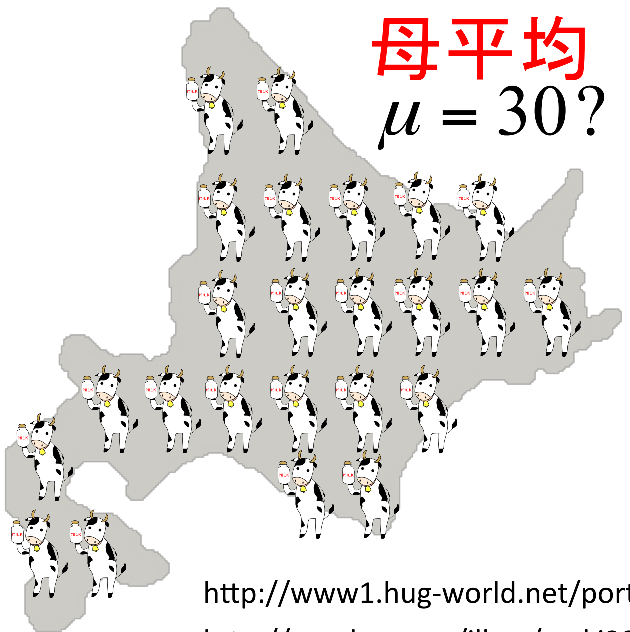
差があるか？

p=0.05

今日やること

- 仮説検定の考え方(母平均の検定の例を使う)
- 母平均の検定1

  母平均が，ある値に等しいか？



http://www1.hug-world.net/portal/hokkaido/

http://e-poket.com/illust/maki29.htm

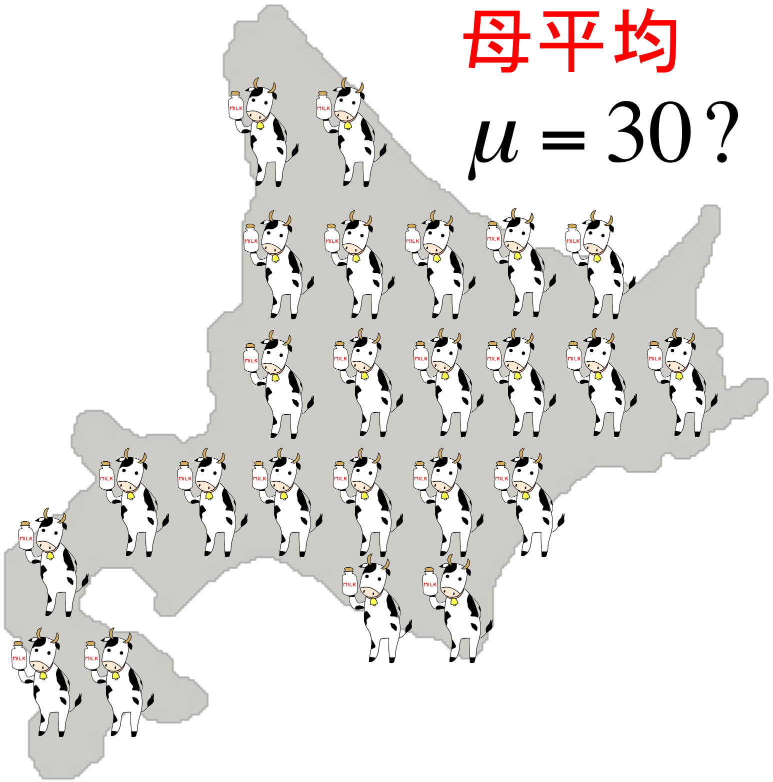
仮説検定では何をするのか？

母集団に対する仮説を手持ちのデータから検証する

- 母平均が，ある値に等しいか？（一標本t検定）
  今日やります
- 2クラスの母平均に差があるか？（二標本t-検定!）
  次回やります
- 薬の効果はあるのか？（カイ二乗検定）
  （治療群とそうでない群に治癒率に差があるかの検定）
  その次にやります

仮説検定の考え方:母平均の検定

母集団



母平均

$\mu = 30?$

推測

抽出

標本

データ

$X_1 = 29, X_2 = 27, X_3 = 31, \ldots$

標本平均 $\bar{X} = 28$

$\bar{X} < \mu$ だが

$\mu \neq 30$ としてよいか？

http://www1.hug-world.net/portal/hokkaido/

http://e-poket.com/illust/maki29.htm

仮説検定の考え方：母平均の検定

仮説A　：　$\mu = 30$

仮説B　：　$\mu \neq 30$　　（$\begin{matrix} \mu > 30 \\ \mu < 30 \end{matrix}$ の場合もある）

手持ちのデータ $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ から，この仮説を検証する

$X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

つまり、手持ちのデータから計算した平均値 $\bar{X}$ が
30のまわりにあるか、離れているのか、で、
仮説を検証する

⇒　仮説A　：$\mu = 30$　が正しいと仮定してみる

仮説A $: \mu = 30$ が正しいとすると、

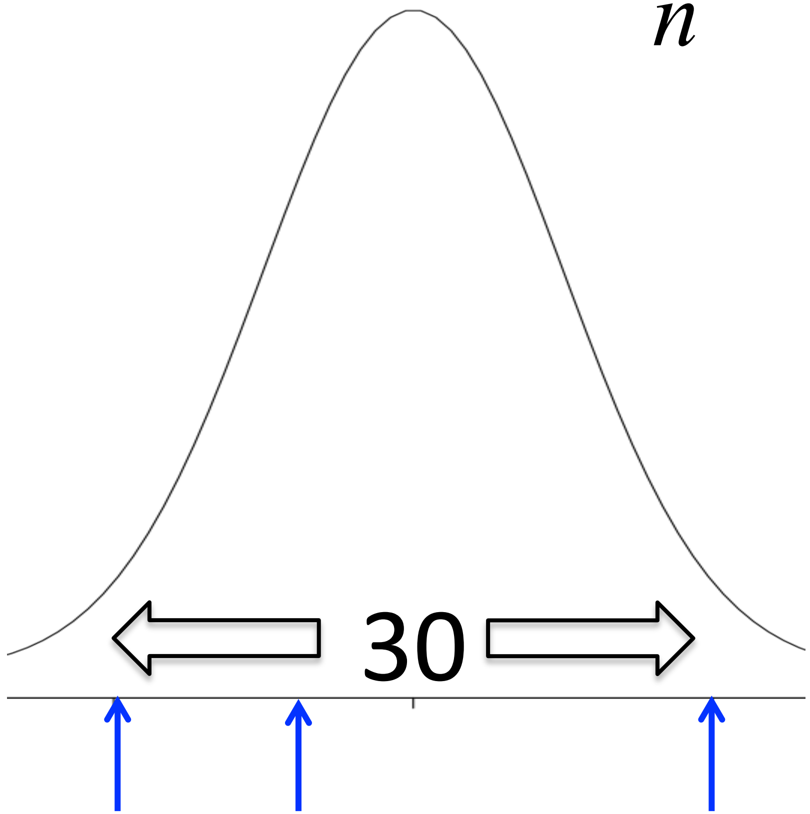
平均値は30のまわりに出る！

$\overline{X} < 25,\ \overline{X} > 35$ なら

$\mu \neq 30$ としてもよさそう

平均値が分布の端にある
　なら、仮説Aは間違い！
そうでないなら、
　仮説A は正しいかも

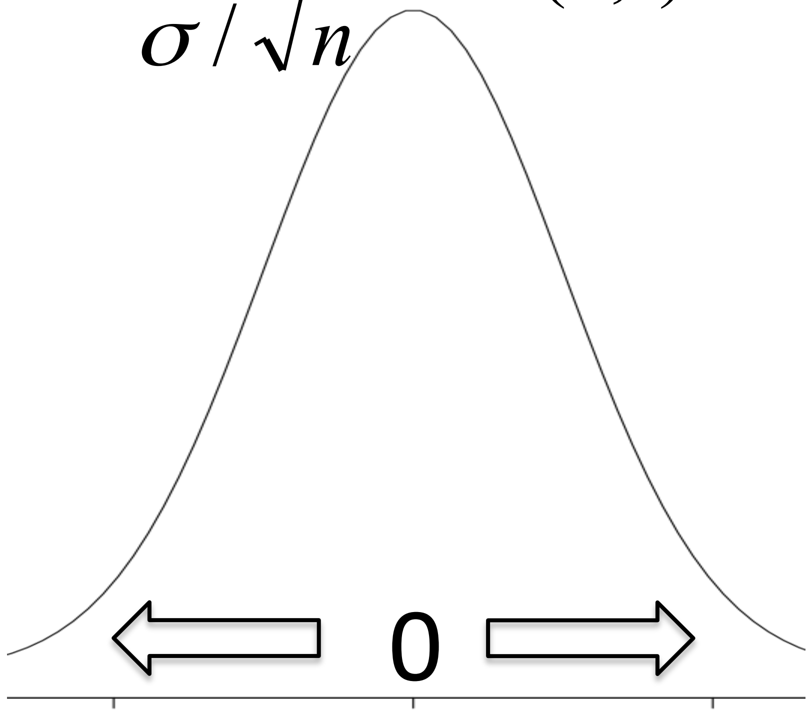
$$\overline{X} \sim N(30, \frac{\sigma^2}{n})$$



$\overline{X} = 25$　$\overline{X} = 28$　$\overline{X} = 35$

1. σ^2の値がわかっている場合

$\boxed{Z = \dfrac{\overline{X} - 30}{\sigma / \sqrt{n}}}$ は0のまわりに出る $\dfrac{\overline{X} - 30}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$



Zが分布の端にあるなら

$\mu \neq 30$ としてもよさそう

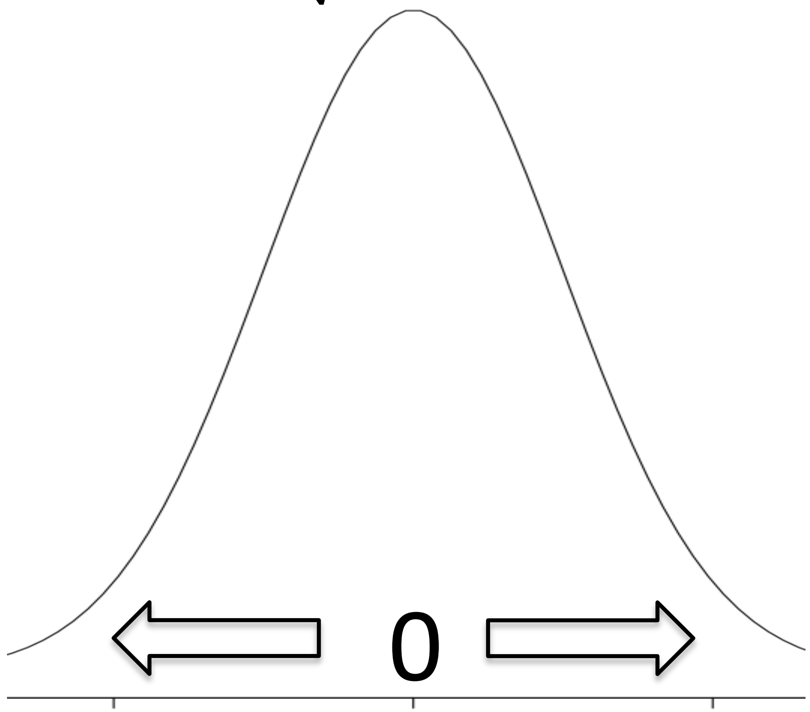
2. σ²の値がわからない場合

$\boxed{T = \dfrac{\overline{X} - 30}{S / \sqrt{n-1}}}$ は0のまわりに出る $\dfrac{\overline{X} - \mu}{S / \sqrt{n-1}} \sim t_{n-1}$

Tが分布の端にあるなら

↑ $\mu \neq 30$ としてもよさそう

p値で判断する！！



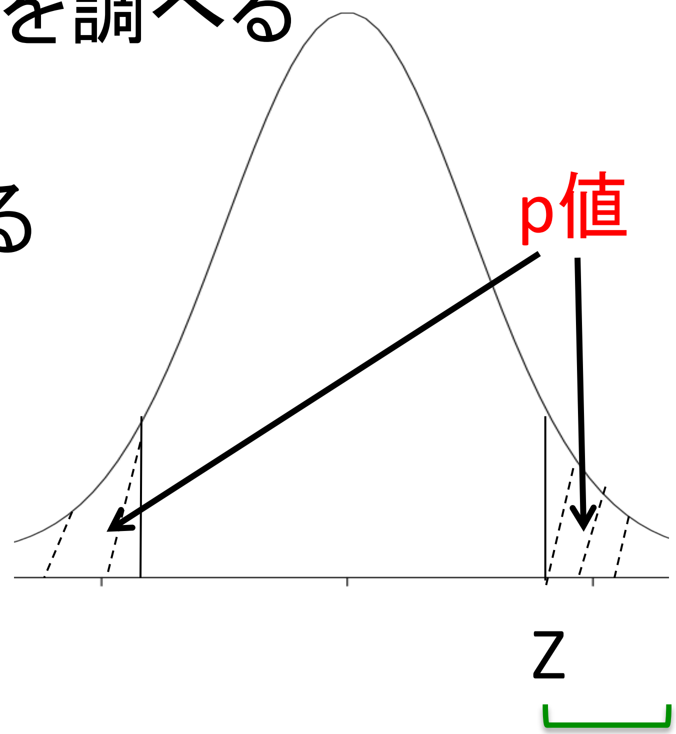
重要!!

p値

手持ちのデータから計算した値（ZやTなど）が，
仮説Aのもとで出る確率

- p値の求め方 1: 分布の両端を調べる （通常）
  2: 分布の片側だけを調べる
- p値が小さい
  ⇒ 仮説Aは正しくないと判断する
  ⇒ 仮説Aを<u>棄却する</u>

- 小ささの判断
  p値≦0.05 なら十分小さいとする
  (0.01のときもある）
  0.05や0.01 : <u>有意水準</u>という



ここの面積
< 0.025かどうか

仮説検定の考え方: 背理法

まず，仮説Aを立てる　$\mu = 30$

手持ちのデータから計算した値（ZやTなど）が，

仮説Aのもとで出る確率（p値）が小さい

⇒　仮説Aは成り立たないと判断し、（仮説Aを棄却する）

逆の仮説Bが正しいと判断する（仮説Bを採択する）

$\mu \neq 30$

確率（p値）が大きいとき：

仮説Aのもとで，おかしなことは起きなかった

（仮説Aを受容する（仮説は棄却できない）と言う）

注意：「仮説Aが正しい!」とは言えない

2つの仮説： <u>帰無仮説</u>と<u>対立仮説</u>

<u>例</u>　北海道全体の乳量の平均値は30kgかどうか？

仮説A：乳量の平均値は30kg　←――― <u>帰無仮説</u>

$$\mu = 30$$

H_0

仮説B：乳量の平均値は30kg でない ← <u>対立仮説</u>

$$\mu \neq 30$$

H_1

仮説検定の手順(概略)

ある統計量の値

検定統計量という

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

1. 有意水準αを決める(通常、α ＝0.05)
2. 帰無仮説H_0と対立仮説H_1を決める
3. 手持ちのデータから計算した値(Zなど)が帰無仮説H_0のもとでの分布から、どのくらい出にくいかの確率(p-値)を計算する
あるいは、データから計算した値と%点を比較する
4. 計算した確率(p-値) ≦αなら
あるいは、|計算した値| ≧ %点 なら、
帰無仮説H_0は間違いだと判断(棄却)し,
対立仮説H_1を採択する

確率が大きいなら あるいは、|計算した値|< %点
帰無仮説H_0を受容する(棄却できない)

$\mu=\mu_0$の検定の手順（p値を求める）

準備：　有意水準 α を決める

1. 帰無仮説は　　　　H_0:　$\mu=\mu_0$
2. 対立仮説を決める　H_1:　$\mu\neq\mu_0$　（$\mu>\mu_0$　or　$\mu<\mu_0$?）
3. 検定統計量の値を計算する

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \quad \text{or} \quad T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n-1}}$$

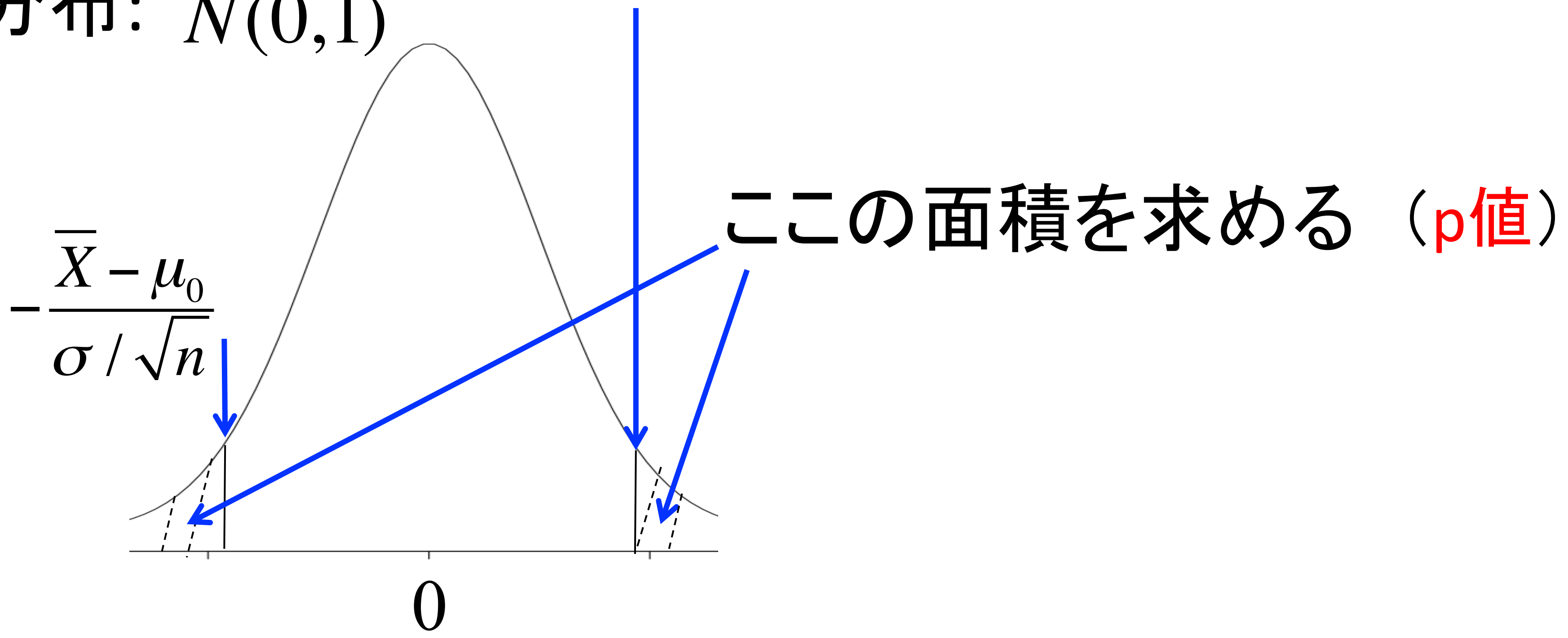
4. H_0のもとでの検定統計量の分布が決まるので、p-値を求める
5. p値≦αかどうかを調べる
6. p値≦αならH_0を棄却しH_1を採択
   そうでないならH_0を受容

1. σ²の値がわかっている場合

検定統計量： $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

分布： $N(0,1)$



標準正規分布の確率密度関数

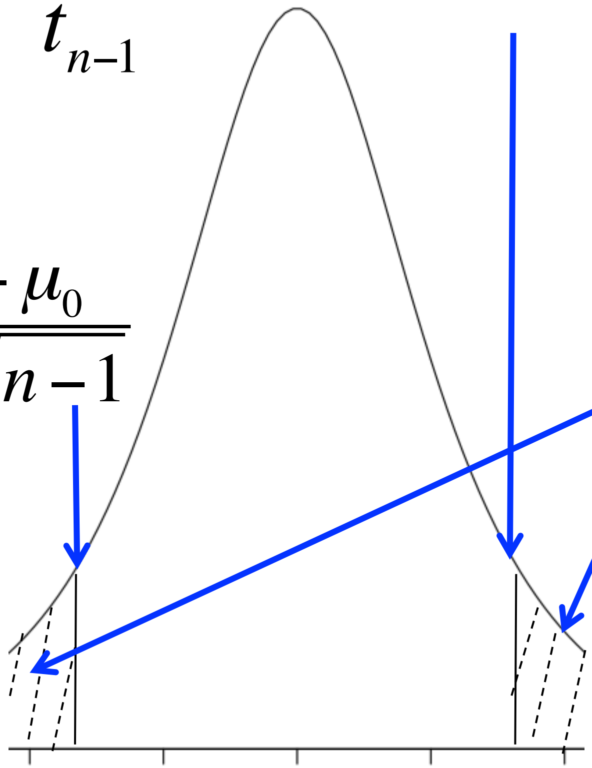
2. σ^2の値がわからない場合

検定統計量: $T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n-1}}$

$$\frac{\overline{X} - \mu}{S / \sqrt{n-1}} \sim t_{n-1}$$

分布: t_{n-1}

$$-\frac{\overline{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n-1}}$$



ここの面積を求める

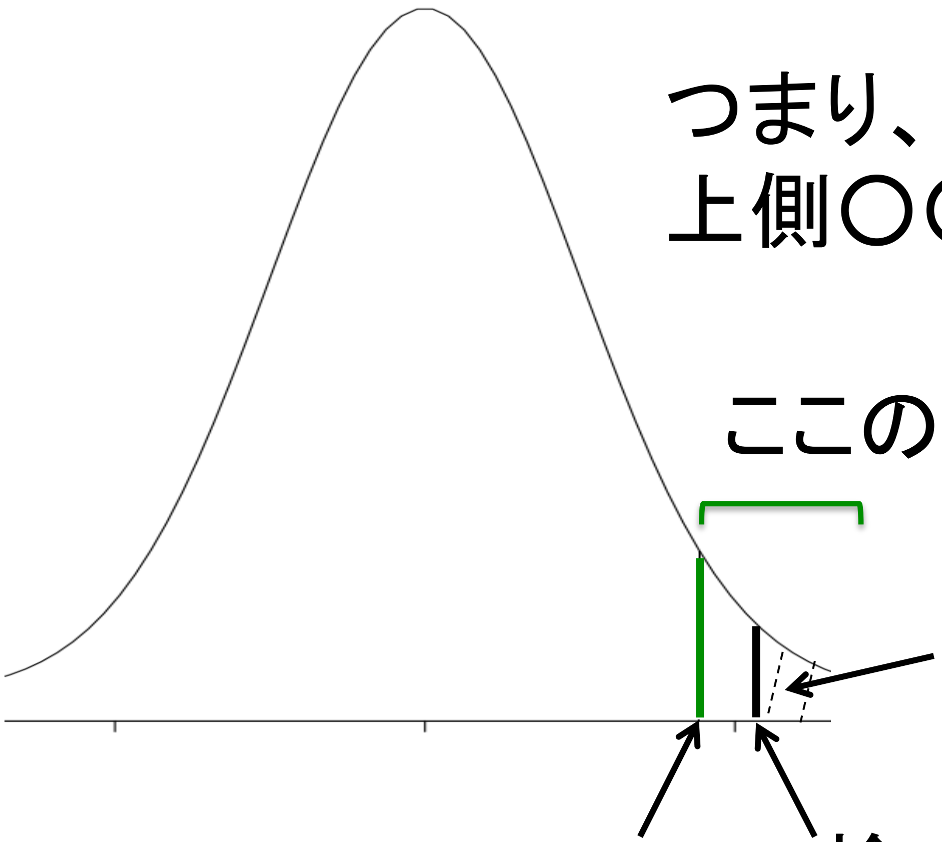
（p値）

自由度n-1のt分布の確率密度関数

p値を求めないやり方：教科書

検定統計量の値で判断する

つまり、検定統計量の値を上側〇〇%点と比較する



μ=μ_0の検定の手順（p値を求めないやり方）

準備: 有意水準αを決める

1. 帰無仮説は　H$_0$: $\mu=\mu_0$
2. 対立仮説を決める H$_1$: $\mu\neq\mu_0$　($\mu>\mu_0$ or $\mu<\mu_0$?)
3. 検定統計量の値を計算する

$$Z = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \text{or} \quad T = \frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n-1}}$$

4. H$_0$のもとでの検定統計量の分布が決まるので、上側α/2×100%点を求める
5. |検定統計量の値|≧（上側α/2×100%点）かを調べる
6. |検定統計量の値|≧（上側α/2×100%点）なら H$_0$を棄却しH$_1$を採択　そうでないならH$_0$を受容

用語まとめ

- 帰無仮説　：　これから否定する仮説(!)
- 対立仮説　：　帰無仮説の逆(主張したい仮説)

- 検定統計量　：　検定に使う統計量

- p値　：　確率の値
- 有意水準　：　p値の閾値(通常は0.05)

- 帰無仮説を棄却する：　帰無仮説は正しくないと判断
- 対立仮説を採択する：　対立仮説が正しいと判断

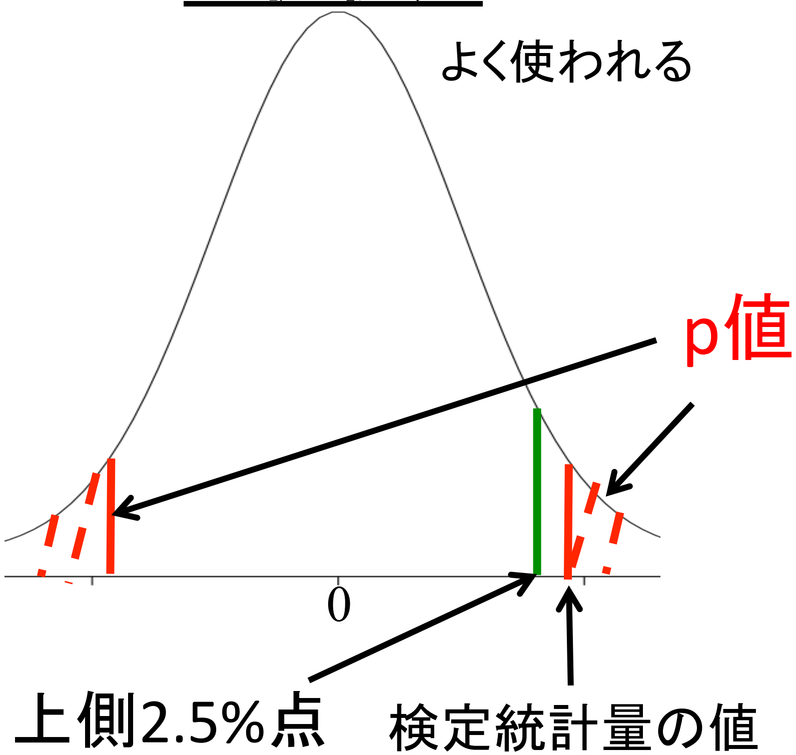
- 帰無仮説を受容する：　帰無仮説が正しくないとは言えない　と判断

その他：　両側検定と片側検定　　教科書p104
第1種の誤り，第2種の誤り　教科書p105

参考： **両側検定**と片側検定

p値の計算方法、%点の取り方は2つある

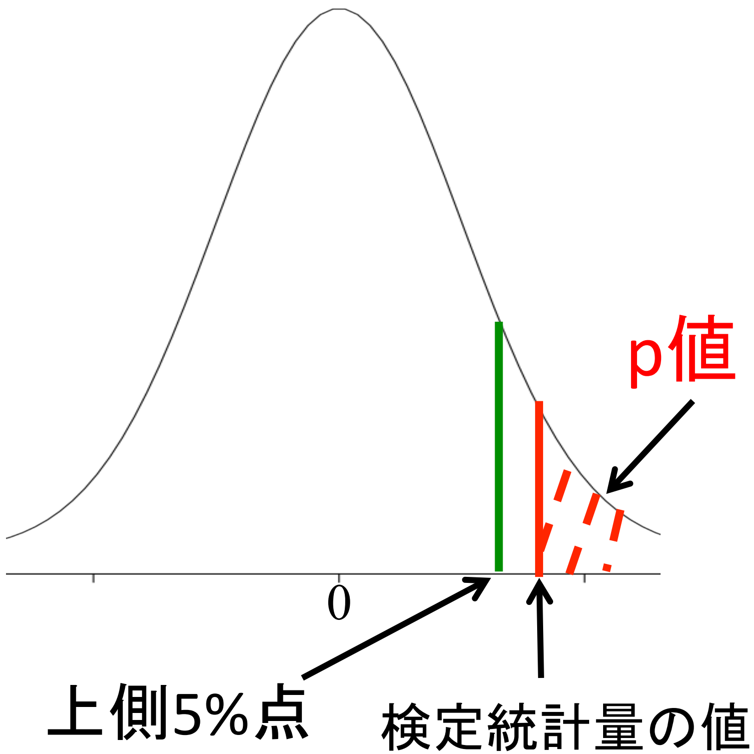
両側検定



$$H_0 : \mu = 30$$

$$H_1 : \mu \neq 30$$

片側検定



$$H_0 : \mu = 30$$

$$H_1 : \mu > 30$$

$\mu=\mu_0$の検定の手順（p値を求める）

準備:　有意水準αを決める

1. 帰無仮説は　H_0: $\mu=\mu_0$
2. 対立仮説を決める　H_1: $\mu>\mu_0$ or $\mu<\mu_0$
3. 検定統計量の値を計算する

$$\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \text{or} \quad \frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n-1}}$$

4. H_0のもとでの分布が決まるので、p-値を求める
5. p値≦αかどうかを調べる
6. p値≦αならH_0を棄却しH_1を採択
   そうでないならH_0を受容

片側の
p-値になる

$\mu=\mu_0$の検定の手順（p値を求めないやり方）

準備～手順3までは同じ

4. H_0のもとでの検定統計量の分布が決まるので、
   上側α×100%点を求める　　（片側検定）
5. （検定統計量の値）≧上側α×100%点かを調べる
6. 検定統計量の値が大きいならH_0を棄却しH_1を採択
   そうでないならH_0を受容

両側検定と片側検定の注意

- 両側検定のp 値は片側検定の2倍になる！
- なので、両側検定の方が厳しい検定

- 両側検定で有意　⇒　片側検定でも有意
- 片側検定で有意でない

　　⇒　両側検定でも有意でない

参考：　第１種の誤りと第２種の誤り

教科書p105

- 第１種の誤り (Type I error)

  帰無仮説H_0が正しいのに、棄却してしまう誤り

  　例：　薬の効果がないのに、あると判断してしまう

  その確率は有意水準αに等しい　つまり，仮説検定では，この誤りが起きてしまう確率を有意水準以下にしている

- 第２種の誤り(Type II error)

  対立仮説H_1が正しいのに、H_0を受容してしまう誤り

  　例：　薬の効果があるのに、ないと判断してしまう

まとめ: $\mu=\mu_0$の検定

1. σ^2の値がわかっている場合

   検定統計量: $\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

   分布　: $N(0,1)$

2. σ^2の値がわからない場合

   検定統計量: $\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n-1}}$

   分布　: t_{n-1}

例題 【例6.2.1】（片側検定）

ある高校入試の数学の点数は平均64点，標準偏差16であることが知られている。ある中学からの受験生49人の平均点は68点であった。この中学校の数学成績は優れていると言えるか？有意水準5%で検定せよ

【解】$H_0: \mu = 64,\quad H_1: \mu > 64,\qquad \mu_0 = 64, \sigma = 16$

$$T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{x} - 64}{16/\sqrt{49}} = \frac{68-64}{16/7} = 1.75$$

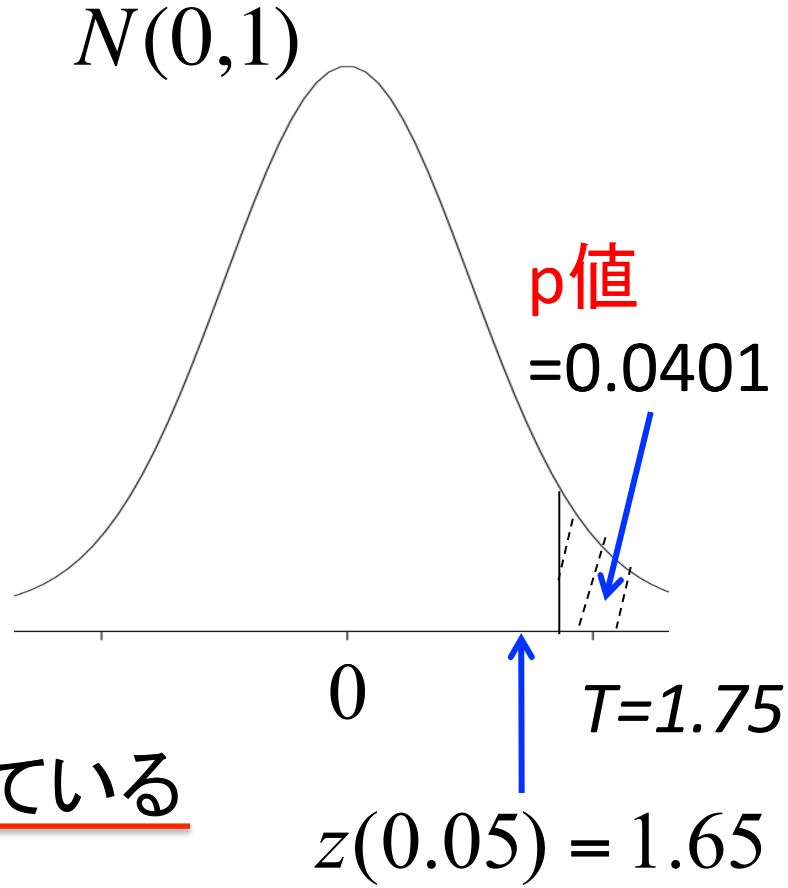
$$p = P(T \geq 1.75) = 0.0401 < 0.05$$

or $T > z(0.05) = 1.65$

帰無仮説を棄却し，
対立仮説を採択する

$$H_0 : \mu = 64$$

$$H_1 : \mu > 64$$



帰無仮説を棄却し，
対立仮説を採択する
つまり、数学成績は優れている

例題：【例6.2.2】（両側検定）

合金に含まれる鉄の含有率(%): $\mu_0 = 14$

12.6, 13.4, 14.5, 11.8, 13.7 $\Rightarrow \mu = 14?$

【解】 $H_0 : \mu = 14, \quad H_1 : \mu \neq 14,$

$$\bar{x} = 13.2, S^2 = 0.86$$

$$T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S / \sqrt{n-1}} = \frac{13.2 - 14}{\sqrt{0.86} / \sqrt{4}} = -1.725$$

$$p = 2 \times P(T > 1.725) = \underline{0.160 > 0.05}$$

（$|T| < t_4(0.025) = 2.776$）

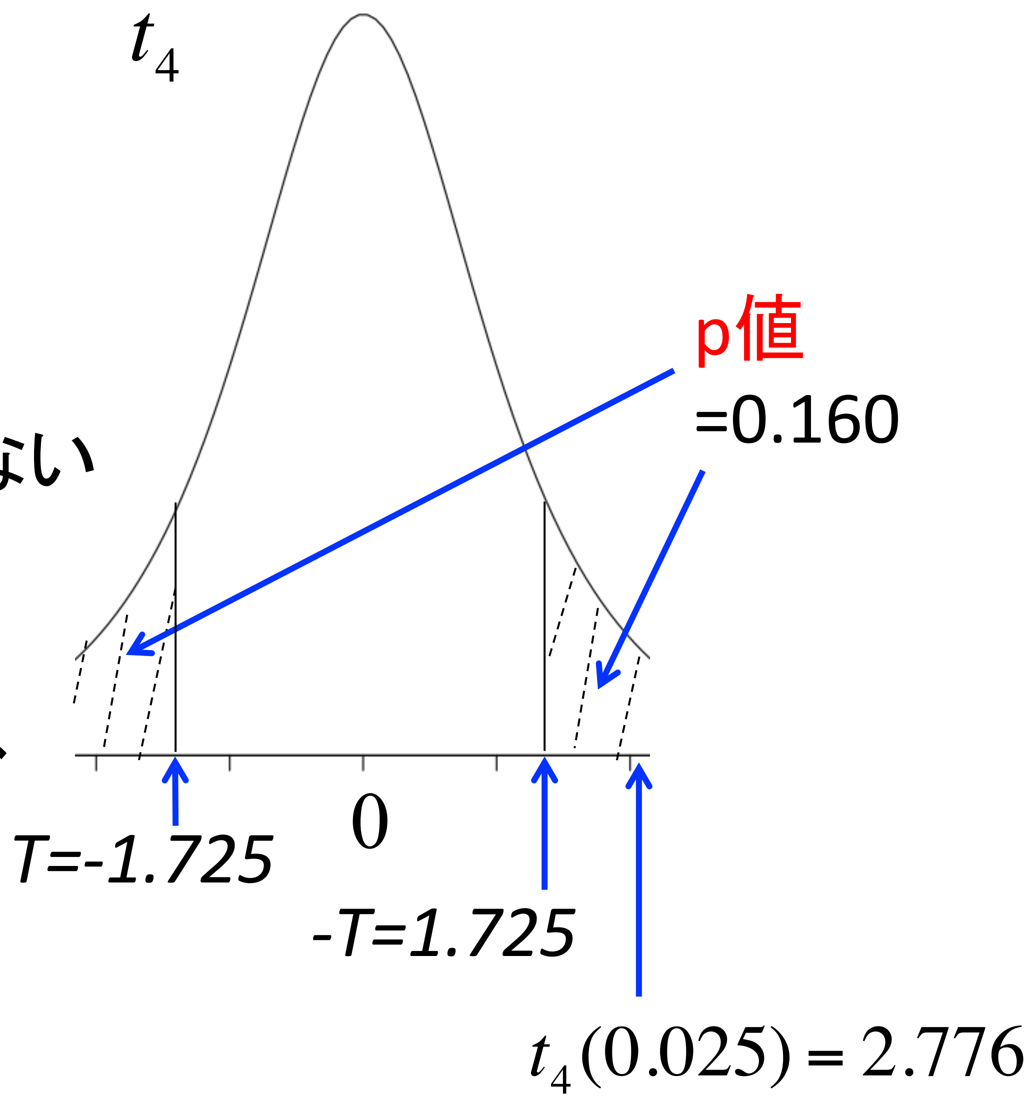
帰無仮説は棄却できない（受容する）

$$H_0 : \mu = 14$$

$$H_1 : \mu \neq 14$$

帰無仮説は棄却できない
（受容する）

合金の鉄の含有率は、
14%であろう、
と判断する



今日やったこと

- 仮説検定の考え方

- 母平均の検定１

  $\mu = \mu_0$ の検定

用語まとめ

- 帰無仮説　　　　　　:　これから否定する仮説(!)
- 対立仮説　　　　　　:　帰無仮説の逆(主張したい仮説)
- 検定統計量　　　　　:　検定に使う統計量
- p値　　　　　　　　:　確率の値
- 有意水準　　　　　　:　p値の閾値
- 帰無仮説を棄却する:　帰無仮説は正しくないと判断
- 対立仮説を採択する:　対立仮説が正しいと判断
- 帰無仮説を受容する:　帰無仮説が正しくないとは言えない　と判断

その他:　両側検定と片側検定　　　教科書p104
　　　　第1種の誤り，第2種の誤り　教科書p105

演習

ある牛乳製造会社は，自分たちが作っている牛乳の乳脂肪分は3%だと主張している。この主張が正しいか検証するために，この会社の牛乳17本の乳脂肪分を計測した．すると，平均値は2.75%，標本分散は0.4^2であった．この会社の主張は正しいかどうか，有意水準5%で検定せよ．ただし，自由度16のt分布に従う確率変数 T に対して，$P(T \leqq -2.5)=0.012$ となることを使ってよい．

H_0: $\mu=3$　　　n=17, $\bar{X}$ =2.75, $S^2=0.4^2$

H_1: $\mu \neq 3$　　　$\alpha=0.05$

参考：藤澤洋徳「確率と統計」11章